הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 2מ – 104022

מבחן סוף סמסטר מועד א', אביב - 11/07/2018

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
לבחינה שני חלקים: בחלק א' שאלות רב־ברירה ("אמריקאיות") ובחלק ב' שאלות "פתוחות". עבור כל אחת מהשאלות בחלק א' יש להקיף בעיגול את התשובה היחידה הנכונה. על השאלות בחלק ב' יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

לכל אחת מן השאלות בחלק זה יש לבחור את התשובה הנכונה היחידה מבין האפשרויות הרשומות. יש להקיף בעיגול את התשובה הנכונה. סימון לא ברור, או סימון של יותר מתשובה אחת באותה שאלה, יפסול את תשובתך. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 7 נקודות.

1. השטף של השדה $F=(xy^2, yz^2+xze^{\sin(z^2)}, zx^2+e^{x^2})$ דרך המשטח

$$S=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=9, \quad x\geq 0\}$$

עם כיוון נורמל שבו רכיב x הוא אי־שלילי, הוא

א. 0

ב. $\frac{486\pi}{5}$***

ג. $\frac{81\pi}{5}$

ד. $\frac{9\pi}{2}$

ה. 24π

2. נתון כי $|\overline{n}|=1,\ |\overline{m}|=2$ וכי הזווית בין הווקטורים $\overline{n},\ \overline{m}$ היא $\frac{\pi}{6}$.
נגדיר $\overline{a}=\overline{m}-\overline{n},\ \overline{b}=\alpha\overline{m}+2\overline{n}$. אז, $\overline{a}\perp\overline{b}$ כאשר

א. $\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$

ב. $\alpha=\frac{2-2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$***

ג. $\alpha=\sqrt{3}$

ד. $\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$

ה. $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

3. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. אז

א. $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$.

ב. $f(x,y)$ אינה רציפה ב־ $(0,0)$.

ג. הנגזרת המכוונת בראשית קיימת בכל כיוון.***

ד. $f'_x(0,0)$ קיים אבל $f'_y(0,0)$ אינו קיים

ה. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$ בנקודה $(0,0)$ בכיוון $(1,1)$ קיימת ושווה ל־ 0.

4. מטייל עומד בנקודה $(1,2,1)$ על הר שצורתו $z=f(x,y)=8-x^2-2y^2+xy$. הוא מחליט לנוע משם על ההר בדרך בה קצב שינוי הגובה הוא 3. לאיזה כיוון במרחב עליו לפנות בתחילת תנועתו?

א. $(\frac{2\sqrt{10}}{7},-\frac{3}{7},3)$***

ב. $(0,-1,3)$

ג. $(0,-7,0)$

ד. $(\sqrt{10},\sqrt{20},3)$

ה. $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},3)$

5. ערך האינטגרל

$$\iiint\limits_V \frac{xy}{z}dxdydz$$

כאשר

$$V=\{(x,y,z)|\ z\le x^2+y^2\le 3z,\ 1\le xy\le 2,\ 3x\le y\le 4x\}$$

א. $5\ln 3$

ב. $\frac{3}{4}\ln(3)\ln\left(\frac{4}{3}\right)$***

ג. $\frac{4}{3}\ln(8)9\ln\left(\frac{5}{4}\right)$

ד. 1

ה. $\ln 10$

6. מסת המשטח

$$S=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2\le 2x,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\}$$

עם צפיפות מסה

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

היא

א. 3π

ב. $\sqrt{\pi}$

ג. 0

ד. $2\sqrt{3}\pi$

ה. $3\sqrt{2}\pi$***

עבור שאלה זו אפשר להשתמש בנוסחאות

$$\cos^4 x=\frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{8},\qquad \cos(2x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$$

7. נתון כי $z(x,y)$ מוגדר בסביבת $(1,0)$ ומקיים $z(1,0)=0$ ומוגדר בצורה סתומה ע"י $F(x,y,z)=0$ כאשר ל־ F נגזרות חלקיות רציפות, וגם

$$F(1,0,0)=0, \quad F'_x(1,0,0)=1, \quad F'_y(1,0,0)=-4, \quad F'_z(1,0,0)=2$$

ונתון כי המישור המשיק למשטח $z(x,y)$ בנקודה $(1,0,0)$ מקביל לוקטור $(2,1,a)$. אז ערכו של a הוא

א. -1

ב. -2

ג. 0

ד. 1***

ה. 2

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

8. (25 נקודות)
נתון השדה

$$\overline{F}(x,y) = \left(e^{x+2y} + xe^{x+2y} - 2, 2xe^{x+2y} + 2y\right)$$

(א) (7 נקודות)
הוכיחו כי השדה $\overline{F}$ הינו שדה משמר במישור, ומיצאו פונקציית פוטנציאל אחת.

(ב) (5 נקודות)
מיצאו את העבודה של השדה לאורך המסלול

$$\overline{r}(t) = \left(t^2 + t^3, t\cos(\pi t)\right) \qquad 0 \le t \le 1.$$

(ג) (13 נקודות)
מיצאו את העבודה של השדה

$$\overline{F}(x,y) = \left(e^{x+2y} + xe^{x+2y} - 2 + y, 2xe^{x+2y} + 2y + x\right)$$

לאורך המסלול

$$\overline{r}(t) = \left(\cos(t) - \sin(t) - 1, \sin(t)\right) \qquad 0 \le t \le \pi.$$

רמז: השתמשו בזהויות

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}, \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

פתרון:

(א) $\overline{F} \in C^1$ בכל המישור, שהוא תחום פשוט קשר, ובנוסף

$$P'_y = \left(e^{x+2y} + xe^{x+2y} - 2\right)' = 2e^{x+2y} + 2xe^{x+2y} = \left(2xe^{x+2y} + 2y\right)'_x = Q'_x$$

ולכן השדה משמר.

$$\varphi(x,y) = \int P dx = \int e^{x+2y} + xe^{x+2y} - 2dx = e^{x+2y} + xe^{x+2y} - e^{x+2y} - 2x + g(y)$$
$$\varphi(x,y) = \int Q dy = \int 2xe^{x+2y} + 2ydy = xe^{x+2y} + y^2 + h(x)$$
$$g(y) - y^2 = h(x) + 2x = c \implies g(y) = y^2 + c, \quad h(x) = -2x + c$$
$$\varphi(x,y) = xe^{x+2y} + y^2 - 2x + c$$
$$\varphi(x,y) = xe^{x+2y} + y^2 - 2x$$

(ב) מכיוון שהשדה משמר אז העבודה היא

$$\varphi\big(\overline{r}(1)\big)-\varphi\big(\overline{r}(0)\big)=\varphi(2,-1)-\varphi(0,0)=2e^0+(-1)^2-2\cdot 2=-1$$

(ג) ע"י חישוב דומה לסעיף הראשון אפשר לראות כי

$$\psi(x,y)=xe^{x+2y}+y^2-2x+xy$$

פונקציית פוטנציאל של השדה החדש ולכן העבודה היא

$$\psi(-2,0)-\psi(0,0)=-2e^{-2}+4.$$

אפשר גם ע"י חישוב ישיר ושימוש בסעיף קודם כדי לראות כי

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{r}} F\cdot d\overline{r}=\int_{\overline{r}}\big(e^{x+2y}+xe^{x+2y}-2+y,2xe^{x+2y}+2y+x\big)\cdot d\overline{r}=\\
=\;&\int_{\overline{r}}\big(e^{x+2y}+xe^{x+2y}-2,2xe^{x+2y}+2y\big)\cdot d\overline{r}+\int_{\overline{r}}(y,x)\cdot d\overline{r}=\\
=\;&\varphi(-2,0)-\varphi(0,0)+\int_0^{\pi}(\sin(t),\cos(t)-\sin(t)-1)\cdot\big(-\sin(t)-\cos(t),\cos(t)\big)dt=\\
=\;&-2e^{-2}+4+\int_0^{\pi}-\sin^2(t)-\sin(t)\cos(t)+\cos^2(t)-\sin(t)\cos(t)-\cos(t)dt=\\
=\;&-2e^{-2}+4+\int_0^{\pi}\cos(2t)-\sin(2t)-\cos(t)dt=\\
=\;&-2e^{-2}+4+\left(\frac{\sin(2t)}{2}+\frac{\cos(2t)}{2}-\sin(t)\Big|_0^{\pi}\right)=-2e^{-2}+4
\end{aligned}$$

9. (26 נקודות)
נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=xyz$.

(א) (10 נקודות)
מצאו את המינימום והמקסימום של $f(x,y,z)$ על הקבוצה

$$\{(x,y,z)|\ x+y+z=1,\ x,y,z\geq 0\}.$$

(ב) (10 נקודות)
הוכיחו כי

$$0\leq xyz\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

כאשר $x,y,z\geq 0$. רמז: השתמשו בסעיף הקודם.

(ג) (6 נקודות)
(סעיף זה אינו קשור לסעיפים הקודמים) מצאו את הגבול, אם הוא קיים, והסבירו בכל מקרה.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{\sin(x^2+3y^2)}$$

פתרון:

(א) התחום הנתון הוא סגור וחסום והפונקציה $f(x,y,z)$ היא רציפה ולכן לפי וויארשטראס יש מינימום ומקסימום.
נשים לב כי $f(x,y,z)=xyz$ היא אי־שלילית בתחום הנתון ובנוסף כי $f(x,y,z)=0$ אם"ם $x=0$ או $y=0$ או $z=0$. לכן נקודות המינימום הן

$$(0,t,1-t),(t,1-t,0),(t,0,1-t),\quad 0\leq t\leq 1.$$

נשתמש בכופלי לגרנג'. הפונקציות $f(x,y,z)=xyz,\ g(x,y,z)=x+y+z$ גזירות ברציפות כי הן פולינומים, וגם $\nabla g=(1,1,1)\neq(0,0,0)$, ולכן

$$\begin{aligned}
&yz+\lambda=0\\
&xz+\lambda=0\\
&xy+\lambda=0\\
&x+y+z=1\\
&xy=xz=yz\implies x(y-z)=y(z-x)=z(y-x)=0
\end{aligned}$$

אם לפחות אחד מ־ $x,y,z=0$ אז זהו מינימום. אחרת $x=y=z=\frac{1}{3}$ ואז $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$. זהו המקסימום.

(ב) נניח $x,y,z \geq 0$. נסמן $r = x+y+z \geq 0$. אם $r=0$ אז $x=y=z=0$ ואי השוויון ברור. לכן נניח כי $r>0$. אז

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{r}+\frac{z}{r}=1$$

ו־ $\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$ נמצאים בקבוצה מהסעיף הקודם ולכן

$$\frac{xyz}{r^3}=f\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)\leq\frac{1}{27}\implies xyz\leq\left(\frac{r}{3}\right)^3=\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

(ג) נשתמש באי השוויון

$$\frac{|s||t|}{s^2+t^2}\leq\frac{1}{2}$$

$$\frac{xy^2}{\sin(x^2+3y^2)}=\frac{x^2+3y^2}{\sin(x^2+3y^2)}\frac{xy^2}{x^2+3y^2}=\frac{x^2+3y^2}{\sin(x^2+3y^2)}\cdot\frac{xy^2}{x^2+3y^2}$$

מהגבול המיוחד הראשון נובע כי

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+3y^2}{\sin(x^2+3y^2)}=1$$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+3y^2}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{x(\sqrt{3}y)}{x^2+(\sqrt{3}y)^2}\right||y|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{\sin(x^2+3y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+3y^2}{\sin(x^2+3y^2)}\cdot\frac{xy^2}{x^2+3y^2}=1\cdot 0=0$$